



ЦИТ: ua217-036

DOI: 10.21893/2415-7538.2017-06-1-036

УДК 514

**Графский О.А., Сметанина В.В., Ни. Е.Н., Пономарчук Ю.В.**  
**АНАЛИЗ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОКРУЖНОСТИ КАК КРИВОЙ NURBS**

*Дальневосточный государственный университет путей сообщения,*

*Хабаровск, Серышева 47, 680021*

**Grafskiy O.A., Smetanina V.V., NI E.N., Ponomarchuk Y. V.**  
**ANALYSIS OF MODELING OF A CIRCLE AS CURVE NURBS**

*Far Eastern State Transport University,*

*Khabarovsk, 47, Seryshev str., 680021*

*Аннотация. При анализе литературы по моделированию окружности кривой NURBS не выявлено рассмотрение этого вопроса при помощи компьютерной реализации в среде программирования.*

*В настоящей работе представлен анализ моделирования коник как кривых NURBS, а в математическом пакете Maple представлена его компьютерная реализация. При помощи двух подходов: в аналитическом виде [1] и при помощи выполнения матричных операций, не смотря на полученные различия выражения функции, они оказались тождественны.*

*Работа выполнена в рамках научно-исследовательской работы студентов ДВГУПС при кафедре «Вычислительная техника и компьютерная графика».*

*Ключевые слова: коники, окружность, кривая NURBS, матрица, математический пакет Maple.*

*Abstract. When analyzing the literature on modeling the circumference of the NURBS curve, no consideration was given to this issue by computer implementation in the programming environment.*

*In this paper we present an analysis of conic modeling as NURBS curves, and in the Maple mathematical package we present its computer implementation. With the help of two approaches: in the analytical form [1] and by performing matrix operations, in spite of the differences in the function expression obtained, they turned out to be identical.*

*The work was carried out within the framework of the research work of students of the FESTU in the department «Computer Science and Computer Graphics».*

*Key words: conic, circle, NURBS curve, matrix, Maple mathematical package.*

*В настоящей работе рассматривается неоднородный рациональный В-сплайн (NURBS – nonuniform rational B-spline curve). Эти сплайны были предложено Кунсом (S.A. Coons, “Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms,” Tech. Report MAC-TR-41, MIT, Cambridge, Mass., 1967).*

*Как отмечено в работах [1–3], представление рациональных В-сплайнов позволяют описать, и, таким образом, моделировать многие геометрические аналитические формы: прямые линии, плоскости, коники (включая окружности), квадратики.*

*Целью настоящей работы является рассмотреть возможность моделирования окружности уравнением кривой NURBS с применением*



математического пакета Maple и сравнение полученного результата с известными приемами моделирования этой кривой как В-сплайна.

В работе [2, с. 61] дано обоснование применения методики моделирования коник В-сплайнами. В частности отмечено (рис. 1), что

$$\frac{w_1^2}{w_0 w_2} = \text{CSF},$$

где CSF (conic shape factor) – параметр, значение которого определяет вид коники:

- CSF < 1 – дуга эллипса;
- CSF = 1 – дуга параболы;
- CSF > 1 – дуга гиперболы.

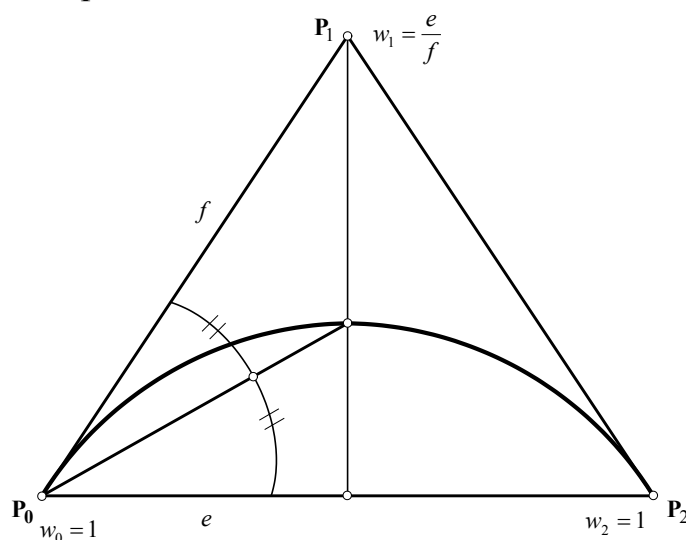


Рис. 1. Интерпретация Пигла [2]

При этом, для описания окружности предлагается следующая модель (рис.2).

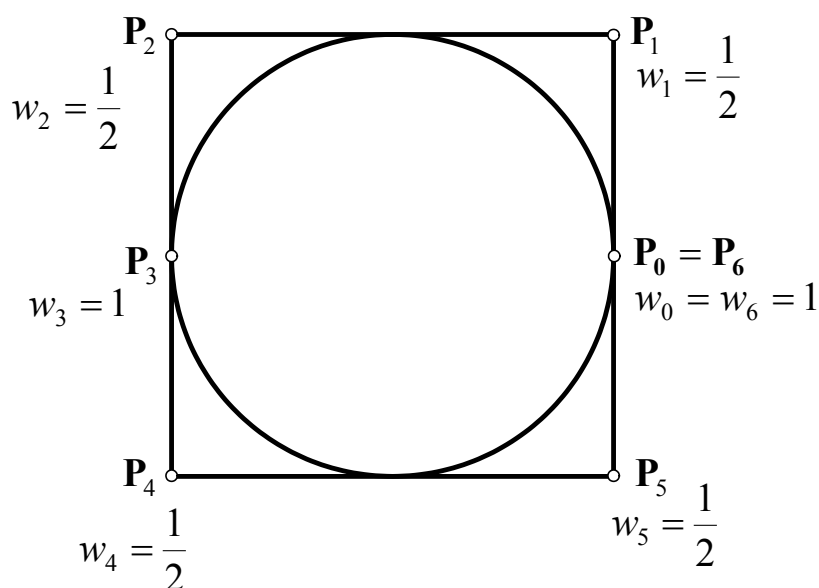


Рис. 2. Задание точек построения окружности по Пиглу [2]



В книге Д. Роджерса и Дж. Адамса [3] также рассматривается положение, когда коника становится окружностью. На рис. 3 в авторской интерпретации обозначений представлены следующие виды сегментов кривых:  $a$  – прямой линия;  $b$  – эллипса;  $c$  – параболы;  $d$  – гиперболы.

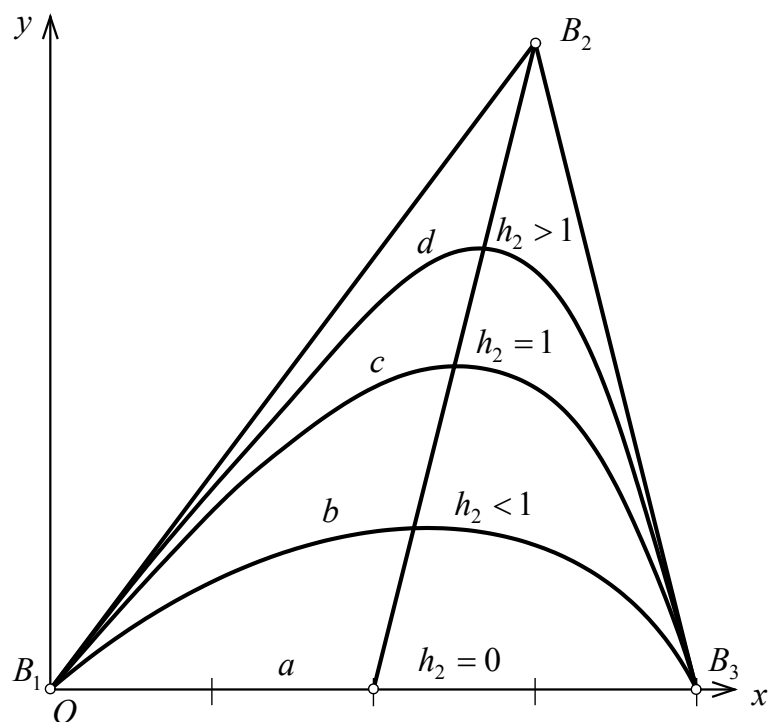


Рис. 3. Семейство коник

При рассмотрении дуги окружности (рис. 4)  $h_2$  определяется из выражения:

$$h_2 = \frac{MS}{SB_2} = \frac{e}{f(1 + \cos \theta) - e} = \frac{e}{f} = \cos \theta. \quad (1)$$

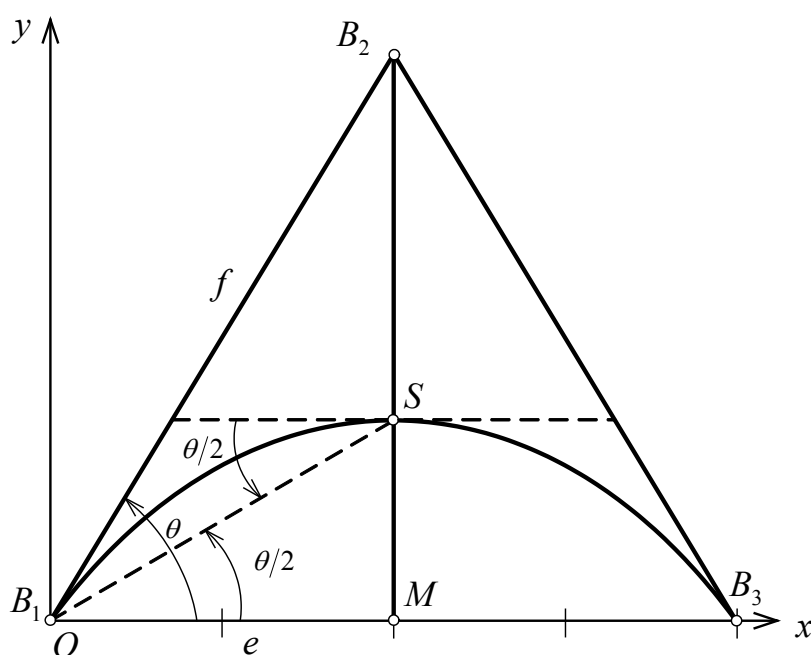


Рис. 4. Обоснование определения параметра  $h_2$



Далее авторы [3] рассматривают возможность построения дуг (сегментов) окружности: три сегмента по 120 градусов и 4 сегмента по 90 градусов. Последний случай приводится и в книге [1], без программной реализации.

Уравнение кривой NURBS в векторном виде может быть записано в следующем виде [1]:

$$\mathbf{P}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{P}_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(u)}. \quad (2)$$

Рассмотрим пример построения одного сегмента первого координатного угла единичной окружности, как В-сплайна, для которого  $n=2$ , где  $n+1=3$  – количество точек,  $k=3$  – порядок кривой NURBS (рис. 5).

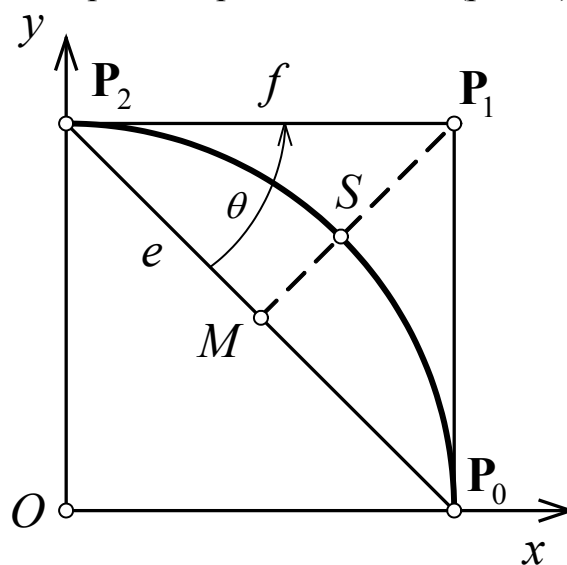


Рис. 5. Дуга окружности первого квадранта

В соответствии с рис. 5 запишем выражение (2) в развернутом виде [1]:

$$\mathbf{P}(u) = \frac{h_0 \mathbf{P}_0 N_{0,3}(u) + h_1 \mathbf{P}_1 N_{1,3}(u) + h_2 \mathbf{P}_2 N_{2,3}(u)}{h_0 N_{0,3}(u) + h_1 N_{1,3}(u) + h_2 N_{2,3}(u)}, \quad (t_{\min} \leq u \leq t_{\max}) \quad (3)$$

в котором однородные координаты и координаты задающих точек соответственно равны:

$$h_0 = 1; h_1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; h_2 = 1,$$

$$\mathbf{P}_0 = (1, 0); \mathbf{P}_1 = (1, 1); \mathbf{P}_2 = (0, 1).$$

Узловые значения параметра (так как  $n=2$ ;  $k=3$ ) имеют последовательность [0 0 0 1 1 1], так как  $t_{\min} = 0$ ,  $t_{\max} = n - k + 2 = 1$ .

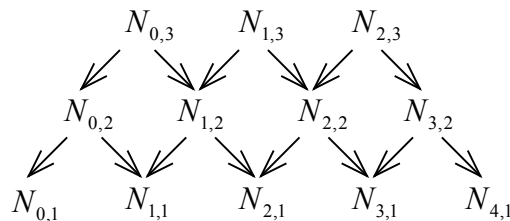
В выражениях (2), (4) функции сопряжения  $N_{i,k}(u)$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - t_i) N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k} - t_{i+1}}; \quad (4)$$



$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & t_i \leq u \leq t_{i+1}; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (5)$$

являются рекуррентными соотношениями, которые схематично можно представить рисунком 6 [4].



**Рис. 6. Схема взаимосвязи функций сопряжения**

В соответствии с выражением (5), в первую очередь определяем функции первого порядка:

$$N_{0,1}(u) = N_{1,1}(u) = N_{3,1}(u) = N_{4,1}(u) = 0, \quad N_{2,1}(u) = 1.$$

Функции второго порядка (4) примут вид:

$$N_{0,2}(u) = N_{3,2}(u) = 0, \quad N_{1,2}(u) = (1-u)N_{2,1}(u), \quad N_{2,2}(u) = uN_{2,1}(u).$$

В таком случае функции сопряжения выражения (4) в выражении (9) запишутся [5]:

$$\begin{aligned} N_{0,3}(u) &= (1-u)N_{1,2}(u) = (1-u)^2 N_{2,1}(u), \\ N_{1,3}(u) &= uN_{1,2}(u) + (1-u)uN_{2,1}(u) = 2u(1-u)N_{2,1}(u), \\ N_{1,3}(u) &= uN_{2,2}(u) = u \cdot uN_{2,1}(u) = u^2 N_{2,1}(u). \end{aligned}$$

Учитывая, что функция

$$N_{2,1}(u) = 1,$$

выражение (3) запишется [1]:

$$\mathbf{P}(u) = \frac{1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1-u)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2u(1-u) + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u^2}{1 \cdot (1-u)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2u(1-u) + 1 \cdot u^2}, \quad (6)$$

из которого следует [1]

$$x(u) = \frac{(1-\sqrt{2})u^2 + \sqrt{2}(1-\sqrt{2})u + 1}{(2-\sqrt{2})u^2 + (\sqrt{2}-2)u + 1}, \quad (7)$$

$$y(u) = \frac{(1-\sqrt{2})u^2 + \sqrt{2}u}{(2-\sqrt{2})u^2 + (\sqrt{2}-2)u + 1}. \quad (8)$$



Однако, при компьютерной реализации в математическом пакете Maple (рис. 7), получены следующие выражения:

$$x := \frac{(1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u)}{(1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u) + u^2}, \quad (9)$$

$$y := \frac{\sqrt{2} u (1-u) + u^2}{(1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u) + u^2}. \quad (10)$$

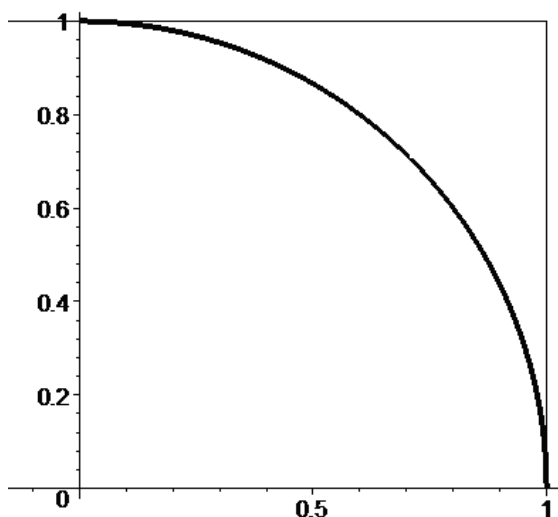


Рис. 7. Полученная реализация окружности

При анализе выяснилось, что выражения (9), (10) тождественны соответственно выражениям (7) и (8).

Следующий этап исследования направлен на определение выражений  $x(u)$  и  $y(u)$  посредством выполнения матричных операций зависимости (6), которая бы представляла одну матрицу в числителе и одну матрицу в знаменателе. Естественно полагать, что такое деление возможно, если матрицу числителя умножить на обратную матрицу знаменателя.

Поэтому встала задача в формировании матрицы знаменателя, которая должна быть квадратной. В результате исследования по зависимости (6) сформированы:

– матрица числителя (11)

$$\begin{bmatrix} (1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u) & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} u (1-u) + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

– матрица знаменателя (12)



$$\begin{bmatrix} (1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u) + u^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u) + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (12)$$

– обратная матрица знаменателя (13)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{-1+2u-2u^2-\sqrt{2}u+\sqrt{2}u^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{-1+2u-2u^2-\sqrt{2}u+\sqrt{2}u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (13)$$

При компьютерной реализации получены следующие зависимости  $x(u)$  и  $y(u)$ :

$$x := -\frac{(1-u)^2 + \sqrt{2} u (1-u)}{-1+2u-2u^2-\sqrt{2}u+\sqrt{2}u^2} ; \quad (14)$$

$$y := -\frac{\sqrt{2} u (1-u) + u^2}{-1+2u-2u^2-\sqrt{2}u+\sqrt{2}u^2} ; \quad (15)$$

При дальнейшем исследовании установлено, что выражения (14) и (15) полностью тождественны соответственно выражениям (7), (9) и (8), (10), а график построения дуги окружности соответствует рисунку 7.

Аналогичным образом можно моделировать дуги окружностей остальных квадрантов, а для полуокружности применить операцию объединения сплайнов.

Литература:

1. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / Кунву Ли. – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
2. Piegl, Les. "On NURBS: A Survey". IEEE Computer Graphic & Applications. January 1991. pp. 55–71. 1991.
3. Роджерс Д. Математические основы машинной графики: Пер с англ./ Д. Роджерс, Дж. Адамс – М.: Мир, 2001. – 604 с.
4. Графский О.А. Вычислительная геометрия: учебное пособие/О.А. Графский. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2014. – 150 с.
5. Графский О.А. Особенности кривых Безье и В-сплайнов / О.А. Графский, В.В. Сметанина, Е.Н. Ни // Вопросы науки и образования: теоретические и практические аспекты: материалы Международной научно-практической конференции 16 мая 2017 г. (Прага, Чехия): Vydavatel "Osviceni", НИЦ "Мир науки", 2017. – С. 99–106.

Статья отправлена: 02.06.2017г.

© Графский О.А., Сметанина В.В., Ни Е.Н., Пономарчук Ю.В.